

Steckbriefaufgaben Aufgabe 79

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat einen Extremwert bei $(1|2)$ und an der Stelle $x = 2$ einen Wendepunkt mit der Steigung -1 . Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

4 Bedingungen:

1. Hat einen Extremwert bei $(1|2)$ bedeutet zum einen:

$$f(1) = 2 \rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 2 \rightarrow a + b + c + d = 2 \quad \text{I}$$

2. Hat einen Extremwert bei $(1|2)$ bedeutet zum anderen:

$$f'(1) = 0 \rightarrow 3a \cdot 1 + 2b \cdot 1 + c = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0 \quad \text{II}$$

3. Hat an der Stelle $x = 2$ einen Wendepunkt mit einer Steigung von -1 bedeutet zum einen:

$$f''(2) = 0 \rightarrow 6a \cdot 2 + 2b = 0 \rightarrow 12a + 2b = 0 \quad \text{III}$$

4. Hat an der Stelle $x = 2$ einen Wendepunkt mit einer Steigung von -1 bedeutet zum anderen:

$$f'(2) = -1 \rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = -1 \rightarrow 12a + 4b + c = -1 \quad \text{IV}$$

$$\text{II} \cdot (-1) + \text{IV}$$

$$\begin{array}{r} -3a - 2b - c = 0 \\ \underline{12a + 4b + c = -1} \\ 9a + 2b = -1 \quad \text{V} \end{array}$$

$$\text{III} + \text{V} \cdot (-1)$$

$$\begin{array}{r} 12a + 2b = 0 \\ \underline{-9a - 2b = 1} \\ 3a = 1 \quad | :3 \end{array}$$

$$a = 1/3$$

$a = 1/3$ in V eingesetzt:

$$9 * 1/3 + 2b = -1$$

$$3 + 2b = -1 \quad | -3$$

$$2b = -4 \quad | :2$$

$$b = -2$$

$a = 1/3$ und $b = -2$ in II eingesetzt:

$$3 * 1/3 + 2 * (-2) + c = 0$$

$$1 - 4 + c = 0$$

$$-3 + c = 0 \quad | +3$$

$$c = 3$$

$a = 1/3$ und $b = -2$ und $c = 3$ in I eingesetzt:

$$1/3 - 2 + 3 + d = 2$$

$$4/3 + d = 6/3 \quad | -4/3$$

$$d = 2/3$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$\mathbf{f(x) = (1/3)x^3 - 2x^2 + 3x + 2/3}$$

