

Steckbriefaufgaben Aufgabe 23

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat im Punkt (1|4) eine waagerechte Tangente und bei (0|2) einen Wendepunkt. Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

4 Bedingungen:

1. Hat im Punkt (1|4) eine waagerechte Tangente bedeutet zum einen:

$$f(1) = 4 \rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 4 \rightarrow a + b + c + d = 4 \quad \text{I}$$

2. Hat im Punkt (1|4) eine waagerechte Tangente bedeutet zum anderen:

$$f'(1) = 0 \rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0 \quad \text{II}$$

3. Hat bei (0|2) einen Wendepunkt bedeutet zum einen:

$$f(0) = 2 \rightarrow a \cdot (0)^3 + c \cdot 0 + d = 2 \rightarrow d = 2$$

4. Hat bei (0|2) einen Wendepunkt bedeutet zum anderen:

$$f''(0) = 0 \rightarrow 6a \cdot 0^2 + 2b = 0 \rightarrow 2b = 0 \quad | :2 \rightarrow b = 0$$

$b = 0$ und $d = 2$ in I eingesetzt, ergibt

$$a + c + 2 = 4 \quad | -2$$

$$a + c = 2 \quad \text{III}$$

$b = 0$ in II eingesetzt, ergibt

$$3a + c = 0 \quad \text{IV}$$

$$\text{III} \cdot (-1) + \text{IV}$$

$$-a - c = -2$$

$$\underline{3a + c = 0}$$

$$2a = -2 \quad | :2$$

$$a = -1$$

$a = -1$ in III eingesetzt:

$$-1 + c = 2 \quad | +1$$

$$c = 3$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$f(x) = -x^3 + 3x + 2$$

