

Steckbriefaufgaben Aufgabe 19

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt an der Stelle $x = 1$ die x-Achse und hat in $((3|-16))$ einen Wendepunkt. Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

4 Bedingungen:

1. Berührt an der Stelle $x = 1$ die x-Achse bedeutet zum einen:

$$f(1) = 0 \rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0 \quad \text{I}$$

2. Berührt an der Stelle $x = 1$ die x-Achse bedeutet zum anderen:

$$f'(1) = 0 \rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0 \quad \text{II}$$

3. Hat in $((3|-16))$ einen Wendepunkt bedeutet zum einen:

$$f(3) = -16 \rightarrow a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = -16 \rightarrow$$

$$27a + 9b + 3c + d = -16 \quad \text{III}$$

4. Hat in $((3|-16))$ einen Wendepunkt bedeutet zum anderen:

$$f''(3) = 0 \rightarrow 6a \cdot 3 + 2b = 0 \rightarrow 18a + 2b = 0 \quad \text{IV}$$

$$\text{I} \cdot (-1) + \text{III}$$

$$\begin{array}{r} -a - b - c - d = 0 \\ \underline{27a + 9b + 3c + d = -16} \\ 26a + 8b + 2c = -16 \quad \text{V} \end{array}$$

$$\text{II} \cdot (-2) + \text{V}$$

$$\begin{array}{r} -6a - 4b - 2c = 0 \\ \underline{26a + 8b + 2c = -16} \\ 20a + 4b = -16 \quad \text{VI} \end{array}$$

$$\text{IV} \cdot (-2) + \text{VI}$$

$$\begin{array}{r} -36a - 4b = 0 \\ 20a + 4b = -16 \\ \hline -16a = -16 \quad | :(-16) \end{array}$$

$$a = 1$$

a = 1 in VI eingesetzt:

$$20 + 4b = -16 \quad | -20$$

$$4b = -36 \quad | :4$$

$$b = -9$$

a = 1 und b = -9 in II eingesetzt:

$$3 - 18 + c = 0 \quad | +3$$

$$-15 + c = 0 \quad | +15$$

$$c = 15$$

a = 1, b = -9 und c = 15 in I eingesetzt:

$$1 - 9 + 15 + d = 0$$

$$7 + d = 0 \quad | -7$$

$$d = -7$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$\mathbf{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7}$$

