

Steckbriefaufgaben Aufgabe 141

Das Wachstum einer Pflanze soll durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades modelliert werden. Folgende Messwerte liegen vor:

Monate	0	1	5
Höhe in cm	20	40	120

Nach 5 Monaten hat sie ihre maximale Höhe erreicht. Zu welchem Zeitpunkt ist der Höhenzuwachs am größten?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

4 Bedingungen:

1. Nach 0 Monaten 20 cm hoch bedeutet:

$$f(0) = 20 \rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 20 \rightarrow d = 20$$

2. Nach 1 Monaten 40 cm hoch bedeutet: (d = 20 eingesetzt)

$$f(1) = 40 \rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + 20 = 40 \rightarrow$$

$$a + b + c + 20 = 40 \quad | -20$$

$$a + b + c = 20 \quad \text{I}$$

3. Nach 5 Monaten 120 cm hoch bedeutet: (d = 20 eingesetzt)

$$f(5) = 120 \rightarrow a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + 20 = 120 \rightarrow$$

$$125a + 25b + 5c + 20 = 120 \quad | -20$$

$$125a + 25b + 5c = 100 \quad \text{II}$$

4. Nach 5 Monaten hat sie ihre maximale Höhe erreicht bedeutet:

$$f'(5) = 0 \rightarrow 3a \cdot 5^2 + 2b \cdot 5 + c = 0 \rightarrow$$

$$75a + 10b + c = 0 \quad \text{III}$$

$$\text{I} \cdot (-1) + \text{III}$$

$$\begin{array}{r}
 -a - b - c = -20 \\
 \underline{75a + 10b + c = 0} \\
 74a + 9b = -20 \quad \text{IV}
 \end{array}$$

$$I * (-5) + II$$

$$\begin{array}{r}
 -5a - 5b - 5c = -100 \\
 \underline{125a + 25b + 5c = 100} \\
 120a + 20b = 0 \quad \text{V}
 \end{array}$$

$$IV * (-20) + V * 9$$

$$\begin{array}{r}
 -1480a - 180b = 400 \\
 \underline{1080a + 180b = 0} \\
 -400a = 400 \quad | :(-400)
 \end{array}$$

$$a = -1$$

$a = -1$ in IV eingesetzt:

$$74 * (-1) + 9b = -20$$

$$-74 + 9b = -20 \quad | +74$$

$$9b = 54 \quad | :9$$

$$b = 6$$

$a = -1$ und $b = 6$ in I eingesetzt:

$$-1 + 6 + c = 20$$

$$5 + c = 20 \quad | -5$$

$$c = 15$$

Gesuchte Funktion:

$$\mathbf{f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x + 20}$$

Der größte Höhenzuwachs findet im Wendepunkt der Funktion statt:

$$f''(x) = 0 \rightarrow -6x + 12 = 0 \quad | -12$$

$$-6x = -12 \quad | :(-6)$$

$$x = 2$$

Nach 2 Monaten ist der Höhenzuwachs am größten.

Monate	0	1	2	3	4	5
Höhe in cm	20	40	66	93	112	120

Höhenzuwachs bis zum 1.Monat 20 cm

2. Monat 26 cm

3. Monat 27 cm

4. Monat 19 cm

5. Monat 8 cm

