

Steckbriefaufgaben Aufgabe 115

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 5. Grades berührt die x-Achse bei 1 und 2, wechselt bei 3 das Vorzeichen und geht durch (0|24). Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 5. Grades:

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$$

$$f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$$

6 Bedingungen :

1. Berührt die x-Achse bei 1 bedeutet zum einen:

$$f(1) = 0 \rightarrow a * 1^5 + b * 1^4 + c * 1^3 + d * 1^2 + e * 1 + f = 0 \rightarrow$$

$$a + b + c + d + e + f = 0 \quad \text{I}$$

2. Berührt die x-Achse bei 1 bedeutet zum anderen:

$$f'(1) = 0 \rightarrow 5a * 1^4 + 4b * 1^3 + 3c * 1^2 + 2d * 1 + e = 0 \rightarrow$$

$$5a + 4b + 3c + 2d + e = 0 \quad \text{II}$$

3. Berührt die x-Achse bei 2 bedeutet zum einen:

$$f(2) = 0 \rightarrow a * 2^5 + b * 2^4 + c * 2^3 + d * 2^2 + e * 2 + f = 0 \rightarrow$$

$$32a + 16b + 8c + 4d + 2e + f = 0 \quad \text{III}$$

4. Berührt die x-Achse bei 2 bedeutet zum anderen:

$$f'(2) = 0 \rightarrow 5a * 2^4 + 4b * 2^3 + 3c * 2^2 + 2d * 2 + e = 0 \rightarrow$$

$$80a + 32b + 12c + 4d + e = 0 \quad \text{IV}$$

5. Wechselt bei 3 das Vorzeichen bedeutet:

$$f(3) = 0 \rightarrow a * 3^5 + b * 3^4 + c * 3^3 + d * 3^2 + e * 3 + f = 0 \rightarrow$$

$$243a + 81b + 27c + 9d + 3e + 24 = 0 \quad \text{V}$$

6. Geht durch (0|24) bedeutet:

$$f(0) = 24 \rightarrow a * 0^5 + b * 0^4 + c * 0^3 + d * 0^2 + e * 0 + f = 24 \rightarrow$$

$$f = 24$$

$$I * (-1) (f = 24 \text{ eingesetzt}) + II$$

$$\begin{array}{r} - a - b - c - d - e - 24 = 0 \\ \underline{5a + 4b + 3c + 2d + e = 0} \\ 4a + 3b + 2c + d - 24 = 0 \quad | +24 \end{array}$$

$$4a + 3b + 2c + d = 24 \quad \text{VI}$$

$$I * (-2) (f = 24 \text{ eingesetzt}) + III$$

$$\begin{array}{r} - 2a - 2b - 2c - 2d - 2e - 48 = 0 \\ \underline{32a + 16b + 8c + 4d + 2e + 24 = 0} \\ 30a + 14b + 6c + 2d - 24 = 0 \quad | +24 \end{array}$$

$$30a + 14b + 6c + 2d = 24 \quad \text{VII}$$

$$I * (-3) + V (f = 24 \text{ eingesetzt})$$

$$\begin{array}{r} - 3a - 3b - 3c - 3d - 3e - 72 = 0 \\ \underline{243a + 81b + 27c + 9d + 3e + 24 = 0} \\ 240a + 78b + 24c + 6d - 48 = 0 \quad | +48 \end{array}$$

$$240a + 78b + 24c + 6d = 48 \quad \text{VIII}$$

$$I * (-1) (f = 24 \text{ eingesetzt}) + IV$$

$$\begin{array}{r} - a - b - c - d - e - 24 = 0 \\ \underline{80a + 32b + 12c + 4d + e = 0} \\ 79a + 31b + 11c + 3d - 24 = 0 \quad | +24 \end{array}$$

$$79a + 31b + 11c + 3d = 24 \quad \text{IX}$$

$$VI * (-2) + VII$$

$$\begin{array}{r} - 8a - 6b - 4c - 2d = - 48 \\ \underline{30a + 14b + 6c + 2d = 24} \\ 22a + 8b + 2c = - 24 \end{array} \quad \text{X}$$

$$VI * (-6) + VIII$$

$$\begin{array}{r} - 24a - 18b - 12c - 6d = - 144 \\ \underline{240a + 78b + 24c + 6d = 48} \\ 216a + 60b + 12c = - 96 \end{array} \quad \text{XI}$$

$$\text{VI} * (-3) * \text{IX}$$

$$\begin{array}{r} - 12a - 9b - 6c - 3d = - 72 \\ \underline{79a + 31b + 11c + 3d = 24} \\ 67a + 22b + 5c = - 48 \end{array} \quad \text{XII}$$

$$\text{X} * (-6) + \text{XI}$$

$$\begin{array}{r} - 132a - 48b - 12c = 144 \\ \underline{216a + 60b + 12c = - 96} \\ 84a + 12b = 48 \end{array} \quad \text{XIII}$$

$$\text{X} * (-5) + \text{XII} * 2$$

$$\begin{array}{r} - 110a - 40b - 10c = 120 \\ \underline{134a + 44b + 10c = - 96} \\ 24a + 4b = 24 \end{array} \quad \text{XIV}$$

$$\text{XIV} * (-3) + \text{XIII}$$

$$\begin{array}{r} - 72a - 12b = - 72 \\ \underline{84a + 12b = 48} \\ 12a = - 24 \quad | :12 \end{array}$$

$$a = - 2$$

a = - 2 in XIV eingesetzt:

$$24 * (-2) + 4b = 24$$

$$- 48 + 4b = 24 \quad | +48$$

$$4b = 72 \quad | :4$$

$$b = 18$$

a = - 2 und b = 18 in XII eingesetzt.

$$67 * (-2) + 22 * 18 + 5c = - 48$$

$$- 134 + 396 + 5c = - 48$$

$$262 + 5c = - 48 \quad | -262$$

$$5c = - 310 \quad | :5$$

$$c = - 62$$

$a = -2$ und $b = 18$ und $c = -62$ in VII eingesetzt.

$$30 * (-2) + 14 * 18 + 6 * (-62) + 2d = 24$$

$$-60 + 252 - 372 + 2d = 24$$

$$-180 + 2d = 24 \quad | +180$$

$$2d = 204 \quad | :2$$

$$d = 102$$

$a = -2$ und $b = 18$ und $c = -62$ und $d = 102$ in I eingesetzt:

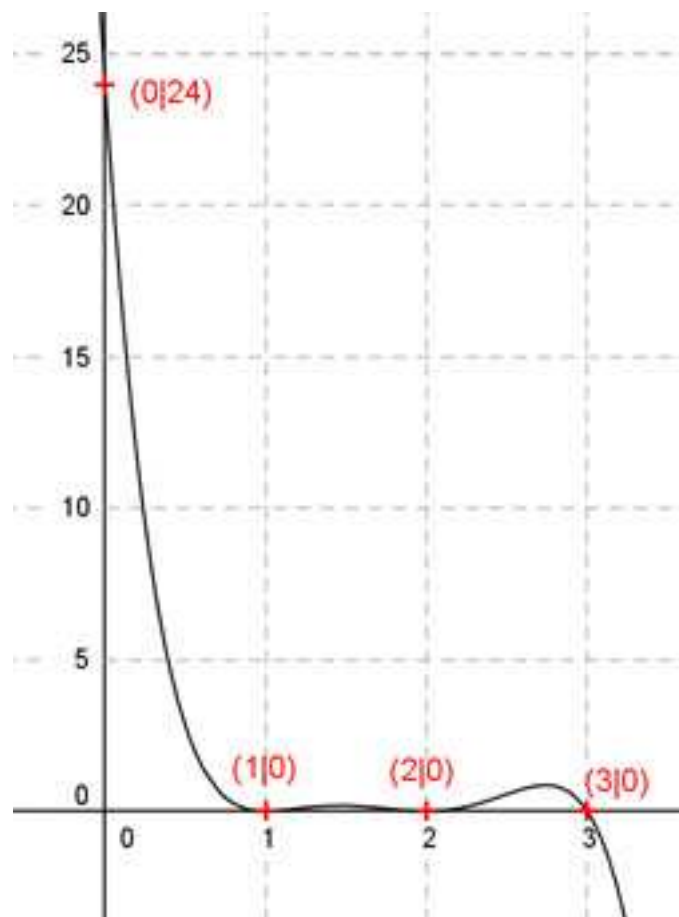
$$-2 + 18 - 62 + 102 + e + 24 = 0$$

$$80 + e = 0 \quad | -80$$

$$e = -80$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$\mathbf{f(x) = -2x^5 + 18x^4 - 62x^3 + 102x^2 - 80x + 24}$$



Alternative Lösung:

Berührungspunkt bei $x = 1$ entspricht dem Linearfaktor $(x - 1)^2$

Berührungspunkt bei $x = 2$ entspricht dem Linearfaktor $(x - 2)^2$

Nullstelle bei $x = 3$ entspricht dem Linearfaktor $(x - 3)$

$$f(x) = a * (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)$$

Punktkoordinaten $(0|24)$ eingesetzt:

$$24 = a * (0 - 1)^2(0 - 2)^2(0 - 3)$$

$$24 = a * 1 * 4 * (-3)$$

$$24 = -12a \quad | :(-12)$$

$$a = -2$$

$$f(x) = -2 * (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)$$

$$f(x) = -2 * (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4x + 4)(x - 3)$$

$$f(x) = -2 * (x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4)(x - 3)$$

$$f(x) = -2 * (x^5 - 9x^4 + 31x^3 - 51x^2 + 40x - 12)$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$\mathbf{f(x) = -2x^5 + 18x^4 - 62x^3 + 102x^2 - 80x + 24}$$