

Quadratische Funktionen Aufgabe 85

Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes S und der Nullstellen einer Parabel der Form $y = ax^2 + bx + c$, wenn ihr Graph durch die Punkte $P_1(0|-2)$, $P_2(-1|1)$ und $P_3(2|6)$ geht?

P_1 ergibt:

$$x = 0 \text{ und } y = -2$$

Eingesetzt in $y = ax^2 + bx + c$

$$0 = a * 0^2 + b * 0 + c$$

$$c = -2$$

P_2 ergibt:

$$x = -1 \text{ und } y = 1 \text{ und } c = -2$$

Eingesetzt in $y = ax^2 + bx + c$

$$1 = a * (-1)^2 + b * (-1) - 2$$

$$a - b - 2 = 1 \quad | +2$$

$$a - b = 3 \quad (1)$$

P_3 ergibt:

$$x = 2 \text{ und } y = 6 \text{ und } c = -2$$

Eingesetzt in $y = ax^2 + bx + c$

$$6 = a * 2^2 + b * 2 - 2$$

$$4a + 2b - 2 = 6 \quad | +2$$

$$4a + 2b = 8 \quad (2)$$

Lösung des linearen Gleichungssystems mit (1) und (2):

$$a - b = 3$$

$$4a + 2b = 8$$

(1) * 2 + (2) ergibt

$$2a - 2b = 6$$

$$4a + 2b = 8$$

$$6a = 14 \quad | :6$$

$$a = \frac{7}{3}$$

In (1) eingesetzt:

$$\frac{7}{3} - b = 3 \quad | + b$$

$$\frac{7}{3} = b + 3 \quad | -3$$

$$\frac{7}{3} - 3 = b$$

$$b = \frac{7}{3} - \frac{9}{3}$$

$$b = -\frac{2}{3}$$

Gesuchte Funktion:

$$y = \frac{7}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2$$

Berechnung der Scheitelpunktkoordinaten:

$$y = \frac{7}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2 \quad | : \frac{7}{3}$$

$$\frac{3}{7}y = x^2 - \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$$

Quadratische Ergänzung :

$$\frac{3}{7} y = x^2 - \frac{2}{7} x + \left(\frac{1}{7}\right)^2 - \left(\frac{1}{7}\right)^2 - \frac{6}{7}$$

$$\text{Mit } x^2 - \frac{2}{7} x + \frac{1}{49} = \left(x - \frac{1}{7}\right)^2$$

$$\frac{3}{7} y = \left(x - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{42}{49}$$

$$\frac{3}{7} y = \left(x - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{43}{49} \quad | : \frac{3}{7}$$

$$y = \left(x - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{43}{21}$$

Scheitelpunktkoordinaten abgelesen :

$$\mathbf{S\left(\frac{1}{7} \mid -\frac{43}{21}\right) \text{ oder } S(0,14 \mid -2,05)}$$

Berechnung der Nullstellen ($y = 0$)

$$0 = \frac{7}{3} x^2 - \frac{2}{3} x - 2 \quad | : \frac{7}{3}$$

$$0 = x^2 - \frac{2}{7} x - \frac{6}{7}$$

p, q - Formel :

$$p = -\frac{2}{7} ; q = -\frac{6}{7}$$

$$x_{1,2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{7}\right)^2 - \left(-\frac{6}{7}\right)}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{7} \pm \sqrt{\frac{1}{49} + \frac{42}{49}}$$

$$x_{1,2} = 0,14 \pm \sqrt{\frac{43}{49}}$$

$$x_{1,2} = 0,14 \pm 0,94$$

$$x_1 = 0,14 - 0,94 = -0,8$$

$$x_2 = 0,14 + 0,94 = 1,08$$

$N_1(-0,8|0)$; $N_2(1,08|0)$

