

Trigonometrische Funktionen Aufgabe 224

Ergänzen Sie die Wertetabelle für x zwischen 0 und 2π :

$$y = \sin 2x - \sin x$$

x	2	3,5 oder 4,71
y	-1,67	1

$$\text{Periode} = 2\pi$$

Berechnung der Nullstellen:

$$0 = \sin 2x - \sin x$$

mit

$$\sin 2x = 2 * \sin x * \cos x$$

$$2 \sin x * \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x * (2 * \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \rightarrow x = 0 + k * \pi \text{ mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

$$2 * \cos x - 1 = 0 \quad | +1$$

$$2 * \cos x = 1 \quad | :2$$

$$\cos x = 0,5 \rightarrow \arccos 0,5 = 1,05 \text{ gerundet}$$

N_1 liegt bei 0 oder 0° , N_2 bei π oder 180° , N_3 bei 2π oder 360° .

N_4 liegt bei 1,05 gerundet oder bei $60,2^\circ$, N_5 liegt bei $(2\pi - 1,05) = 5,2$ gerundet oder bei $297,9^\circ$.

Berechnung der Amplitude A:

$$\text{Sie tritt an der Stelle } x = 3,5 + \left(\frac{4,71 - 3,5}{2} \right) =$$

$$= 4,1 \text{ oder } 235^\circ \text{ gerundet auf.}$$

$$\text{Amplitude} = f(235^\circ) =$$

$$A = |\sin 2 * 235^\circ - \sin 235^\circ| = |0,94 - (-0,82)| = 1,76$$

Funktionswert an einer Stelle x ermitteln:

$$x = 2$$

$$f_{(2)} = \sin(2 * 2) - \sin 2 = \sin(2 * 114,6^\circ) - \sin 114,6^\circ = -1,67 \text{ gerundet}$$

Berechnung der x-Werte für $y = f_{(x)} = 1$:

$f_{(x)} = 1$ eingesetzt, existiert zweimal zwischen n und $2n$ bzw. 180° und 360° (siehe Graph).

An welchen Stellen x die Funktion den Wert 1 annimmt, ist elementar nicht zu ermitteln.

Zur Berechnung wendet man ein Näherungsverfahren an, hier die Regula falsi.

$$\sin 2x - \sin x = 1$$

mit

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \text{ und } \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} - \sin x = 1 \quad | +\sin x$$

$$2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 + \sin x \quad |^2$$

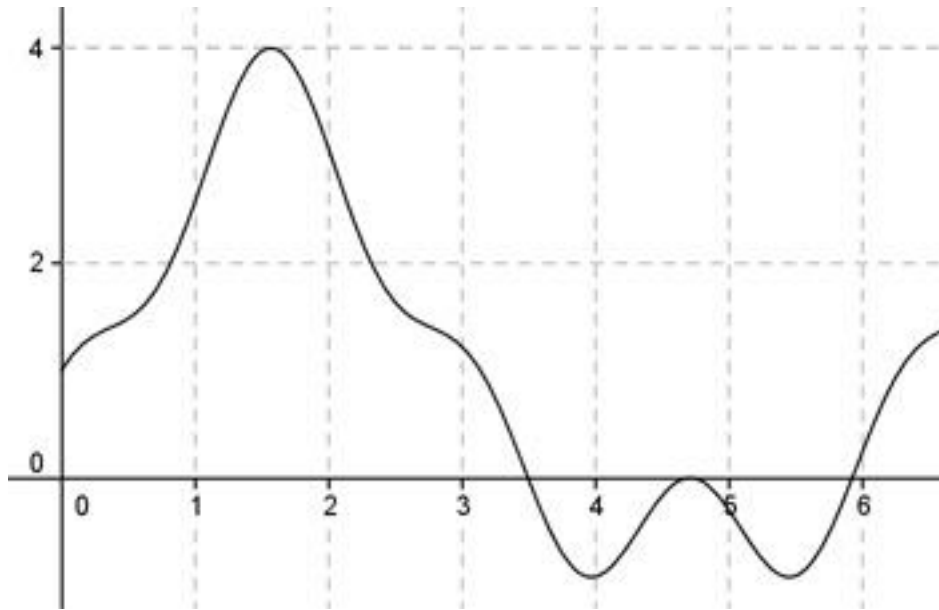
$$4 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x$$

$$4 \sin^2 x - 4 \sin^4 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x \quad | +4 \sin^4 x$$

$$4 \sin^2 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x + 4 \sin^4 x \quad | -4 \sin^2 x$$

$$4 \sin^4 x - 3 \sin^2 x + 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\text{Als Funktion: } y = 4 \sin^4 x - 3 \sin^2 x + 2 \sin x + 1$$



Abgelesen: Nullstellen zwischen 3,4 und 3,6, zwischen 4,6 und 4,8 und zwischen 5,6 und 6.

(Vorzeichenwechsel für $f(x)$, bzw. Berührungspunkt)

Regula falsi: x_0 = gesuchte Nullstelle

$$x_0 = \frac{x_1 |y(x_2)| + x_2 |y(x_1)|}{|y(x_1)| + |y(x_2)|}$$

Nullstelle x_0 zwischen 3,4 und 3,6 mit Excel ermittelt:

3,4	3,6	0,319125222	0,310071047	1,085025755	1,116255769	2,201281524	0,629196269	3,498560994	-0,005547127
3,4	3,498560994	0,005547127	507,6544	0,018860231	1776,059882	1776,078742	507,6599471	3,498559917	-0,005543682
3,4	3,498559917	0,005543682	507,6544	0,018848518	1776,059335	1776,078184	507,6599437	3,49855884	-0,005540239
3,4	3,49855884	0,005540239	507,6544	0,018836813	1776,058789	1776,077626	507,6599402	3,498557765	-0,005536798

Die gesuchte Nullstelle ergibt sich nach mehreren Näherungen mit ausreichender Genauigkeit zu $x_{01} = 3,5$ gerundet.

Nullstelle x_{02} zwischen 4,6 und 4,8 ergibt sich nach dem selben Verfahren zu 4,7 gerundet.

Nullstelle x_{03} zwischen 5,6 und 6 ergibt sich nach dem selben Verfahren zu 5,93 gerundet.

Weil zwischendurch quadriert wurde, ist eine Probe nötig.

Für x_{01} : $\sin(2 * 3,5) - \sin 3,5 = 0,657 - (-0,35) = 1$ Lösung

Für x_{02} : $\sin(2 * 4,71) - \sin 4,71 = 0,0048 - (-0,9999) = 1$ Lösung

Für x_{03} : $\sin(2 * 5,93) - \sin 5,93 = -0,649 - (-0,346) = -0,3$ keine

Lösung

Gesuchte x-Werte: $x_1 = 3,5$ oder $x_2 = 4,71$ und $\alpha_1 = 200,5^\circ$ oder

$\alpha_2 = 269,3^\circ$.