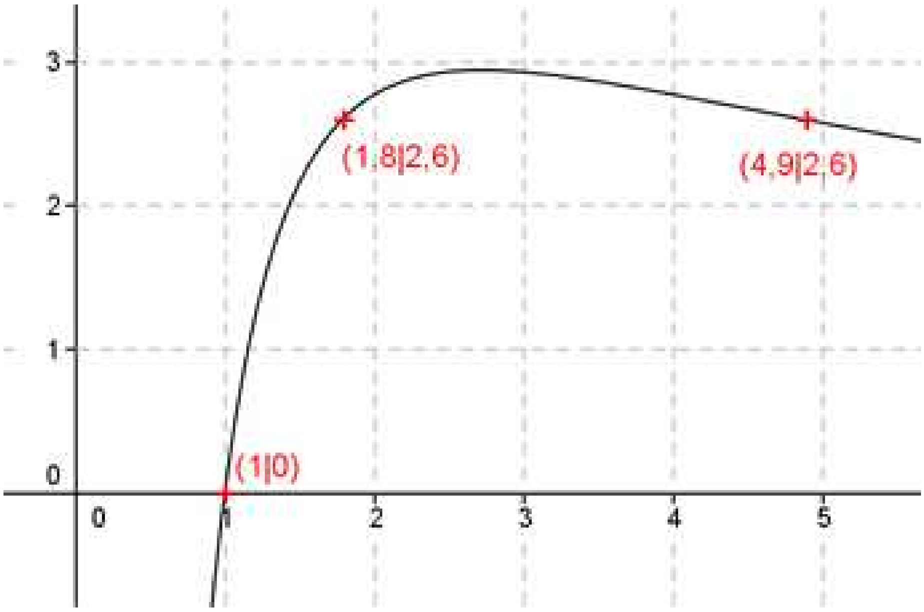
Logarithmusfunktionen Aufgabe 101

$$y = \frac{8 * \ln x}{x}$$

x	1	1,8 oder 4,9
y	0	2,6

$$y = f_{(1)} = \frac{8 * \ln 1}{1} = \frac{8 * 0}{1} = 0$$



An welchen Stellen x die Funktion den Wert 2,6 annimmt, ist elementar nicht zu ermitteln. Abgelesen: Es sind 2 Stellen.

Zur Berechnung wendet man ein Näherungsverfahren an, hier die

Regula falsi.

$f_{(x)} = 2,6$ eingesetzt :

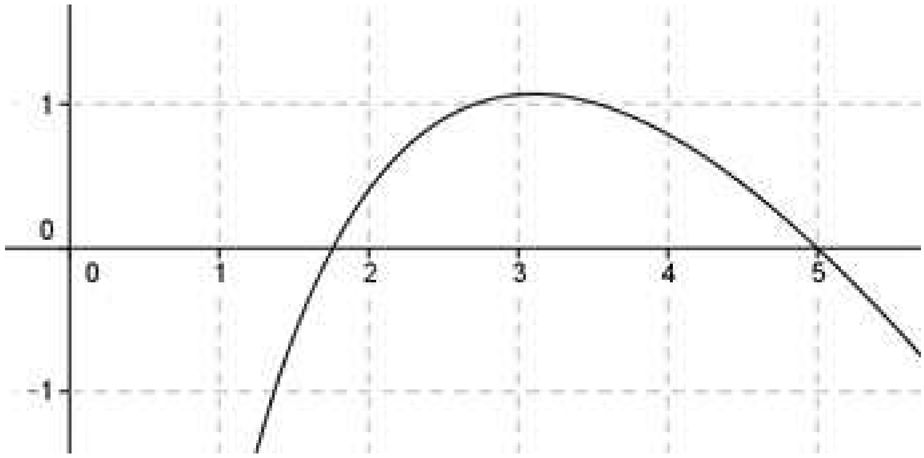
$$2,6 = \frac{8 * \ln x}{x} \quad |*x$$

$2,6x = 8 * \ln x \; |-2,6x$

$8 \ln x - 2,6 x = 0$

Als Funktion: $y = 8 * \ln x - 2,6 * x$

Die Nullstellen dieser Funktion (y = 0) entsprechen den gesuchten Werten für x.



Abgelesen: Nullstellen zwischen 1 und 2 und zwischen 4 und 6. (Vorzeichenwechsel für $f_{(x)}$)

Regula falsi: x_0 = gesuchte Nullstelle

$$x_0 = \frac{x_1\,|y(x_2)| + x_2\,|y(x_1)|}{|y(x_1)| + |y(x_2)|}$$

Nullstelle x_0 zwischen 1 und 2 mit Excel ermittelt:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	0,34517744	2,6	0,34517744	5,2	5,54517744	2,94517744	1,8827991	0,16679876
1	1,8827991	0,16679876	2,6	0,16679876	4,89527766	5,06207642	2,76679876	1,82957882	0,07578137
1	1,82957882	0,07578137	2,6	0,07578137	4,75690494	4,83268632	2,67578137	1,80608415	0,03346959
1	1,80608415	0,03346959	2,6	0,03346959	4,69581878	4,72928837	2,63346959	1,79583937	0,01459786
1	1,79583937	0,01459786	2,6	0,01459786	4,66918236	4,68378022	2,61459786	1,79139603	0,00633208

Bedeutung der Felder:

A: $x_1 = 1$

B: $x_2 = 2$ zu Beginn

C: Absolutwert (Betrag) für $y_{(x2)} = y_{(2)} = 8 * \ln 2 - 2,6 * 2 = 0,345$

D: Absolutwert (Betrag) für $y_{(x1)} = y_{(1)} = 8 * \ln 1 - 2,6 * 1 = 2,6$

E: $x_1 * C = 1 * 0,345 = 0,345$

F: $x_2 * D = 2 * 2,6 = 5,2$

G: Zähler = E + F = 0,345 + 5,2 = 5,545

H: Nenner = C + D = 0,345 + 2,6 = 2,945

I = Näherung x_0 = Zähler/Nenner = 5,545/2,945 = 1,883

J: $y_{(i)}$ = $y_{(1,883)}$ = 8 * ln I - 2,6 * I = 8 * ln 1,883 - 2,6 * 1,883 = 0,167

Wenn die Nullstelle ziemlich genau getroffen wäre, müsste für $y_{(1,883)}$ in J etwa 0 herauskommen.

Der errechnete Funktionswert $y_{(1,883)}$ in J ist noch etwas zu hoch und positiv, nämlich 0,167, liegt also über der x-Achse.

Der Näherungswert x_0 in I, nämlich 1,883, muss rechts von der gesuchten Nullstelle liegen, denn dort sind alle Funktionswerte positiv.

Deswegen ersetzt man in der nächsten Rechnung die 2 durch den näher an der gesuchten Nullstelle liegenden Wert 1,883.

Die gesuchte Nullstelle ergibt sich nach mehreren Näherungen mit ausreichender Genauigkeit zu x_{01} = 1,8 gerundet.

Die Nullstelle zwischen 4 und 6 ergibt sich nach dem selben Verfahren zu x_{02} = 4,9 gerundet.