

Kurven Aufgabe 176

$$f(x) = x * \sin x \quad x \text{ im Bogenmaß}$$

Produktregel erste Ableitung:

$$u = x, u' = 1$$

$$v = \sin x, v' = \cos x$$

$$f'(x) = 1 * \sin x + \cos x * x = \sin x + x * \cos x$$

Summen- und Produktregel zweite Ableitung:

$$u = x, u' = 1$$

$$v = \cos x, v' = -\sin x$$

$$f''(x) = \cos x + 1 * \cos x + (-\sin x) * x = 2 * \cos x - x * \sin x$$

Summen- und Produktregel dritte Ableitung:

$$u = -x, u' = -1$$

$$v = \sin x, v' = \cos x$$

$$f'''(x) = -2 * \sin x + (-1) * \sin x + \cos x * (-x) = -3 * \sin x - x * \cos x$$

Definitionsbereich: $0 \leq x \leq 2\pi$

Wertebereich: $-4,81 \leq f(x) \leq 1,82$ (siehe Extrempunkte)

Nullstellen:

$$x * \sin x = 0 \quad | -2$$

$$x_1 = 0 \quad \mathbf{N_1 (0|0)}$$

$$\sin x = 0$$

$$x_2 = \pi = 3,14 \triangleq 180^\circ \quad \mathbf{N_2 (3,14|0)}$$

$$x_3 = 2\pi = 6,28 \triangleq 360^\circ \quad \mathbf{N_3 (6,28|0)}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = 0 * \sin 0 = 0$$

$$\mathbf{S_y (0|0)}$$

Extrempunkte:

$$\sin x + x \cdot \cos x = 0$$

Wertetabelle:

0	1	2	3	4	5	6	2π
0	1,4	0,1	-2,8	-3,4	0,5	5,5	6,28

Nullstelle $x_1 = 0$

Vorzeichenwechsel zwischen 2 und 3, gewählt Nullstelle $x_{02} = 2,03$

Vorzeichenwechsel zwischen 4 und 5, gewählt Nullstelle $x_{03} = 4,87$

$$x_1 = 0, f_{(0)} = 0, f'_{(0)} = 2 \cdot \cos 0 - 0 \cdot \sin 0 > 0 \rightarrow \text{Tiefpunkt (0|0)}$$

Näherungsverfahren von Newton:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = 2,03 - \frac{\sin 2,03 + 2,03 \cdot \cos 2,03}{2 \cdot \cos 2,03 - 2,03 \cdot \sin 2,03} = 2,03 - 0,00 = 2,03$$

$$f_{(2,03)} = 2,03 \cdot \sin 2,03 = 1,82$$

$$x_3 = 4,87 - \frac{\sin 4,87 + 4,87 \cdot \cos 4,87}{2 \cdot \cos 4,87 - 4,87 \cdot \sin 4,87} = 4,87 - 0,04 = 4,91$$

$$f_{(4,87)} = 4,87 \cdot \sin 4,87 = -4,81$$

$$f'_{(2,03)} = 2 \cdot \cos 2,03 - 2,03 \cdot \sin 2,03 < 0 \rightarrow \text{Hochpunkt (2,03|1,82)}$$

$$f'_{(4,87)} = 2 \cdot \cos 4,87 - 4,87 \cdot \sin 4,87 > 0 \rightarrow \text{Tiefpunkt (4,87|-4,81)}$$

Wendepunkte:

$$2 \cdot \cos x - x \cdot \sin x = 0$$

Wertetabelle:

0	1	2	3	4	5	6	2π
2	0,2	-2,7	-2,4	1,7	5,4	3,6	2

Vorzeichenwechsel zwischen 1 und 2, gewählt Nullstelle $x_{01} = 1,07$

Vorzeichenwechsel zwischen 3 und 4, gewählt Nullstelle $x_{02} = 3,6$

Näherungsverfahren von Newton:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 1,07 - \frac{2 * \cos 1,07 - 1,07 * \cos 1,07}{- 3 * \sin 1,07 - 1,07 * \cos 1,07} = 1,07 - (- 0,01) = 1,08$$

$$f(1,08) = 1,08 * \sin 1,08 = 0,95$$

$$x_2 = 3,6 - \frac{2 * \cos 3,6 - 3,6 * \cos 3,6}{- 3 * \sin 3,6 - 3,6 * \cos 3,6} = 3,6 - (- 0,04) = 3,64$$

$$f(3,64) = 3,64 * \sin 3,64 = - 1,74$$

$$f'''(1,08) = - 3 * \sin 1,08 - 1,08 * \cos 1,08 \neq 0 \rightarrow \mathbf{WP_1 (1,08|0,95)}$$

$$f'''(3,64) = - 3 * \sin 3,64 - 3,64 * \cos 3,64 \neq 0 \rightarrow \mathbf{WP_2 (3,64|- 1,74)}$$

Graph:

