Integral Aufgabe 245

Für welches a ist der Flächeninhalt A zwischen $f_{(x)} = a - (1/9)(a - 3)x^2$ und der positiven x-Achse für a > 3 ein absolutes Minimum?

$f_{(x)}$ ist achsensymmetrisch.

Nullstellen:

$$a - \frac{1}{9}(a - 3)x^2 = 0 \quad |\cdot 9$$

$$9a - (a - 3)x^2 \quad |+(a - 3)x^2$$

$$(a - 3)x^2 = 9a \quad |:(a - 3)$$

$$x^2 = \frac{9a}{a - 3} \quad |\sqrt{\ }$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9a}{a-3}}$$ a > 3 sonst ist der Ausdruck unter der Wurzel negativ

und a ≠ 3.

$$A = \int_0^{\sqrt{\frac{9a}{a-3}}} \left(a - \frac{1}{9}(a - 3)x^2\right)dx = \left|ax - \frac{1}{9}(a - 3)\frac{x^3}{3}\right|_0^{\sqrt{\frac{9a}{a-3}}}$$

$$A_{(a)} = \left|a * \sqrt{\frac{9a}{a-3}} - \frac{(a - 3) * \left(\sqrt{\frac{9a}{a-3}}\right)^3}{27}\right| = \left|\sqrt{\frac{9a}{a-3}} * \left(a - \frac{9a}{27}\right)\right|$$

$$A_{(a)} = \left|\sqrt{\frac{9a}{a-3}} * \left(a - \frac{a}{3}\right)\right| = \left|\frac{1}{3} * \sqrt{\frac{9a}{a-3}} * 2a\right| = \left|2 * \sqrt{\frac{9a^3}{9(a-3)}}\right|$$

$$A_{(a)} = \left|2 * \sqrt{\frac{a^3}{(a-3)}}\right| = 2 * \sqrt{\frac{a^3}{(a-3)}}$$ A liegt oberhalb der x-Achse

Potenzregel, Kettenregel und Quotientenregel für $\sqrt{\frac{a^3}{(a-3)}}$:

$u = \sqrt{a^3}$, $u' = \dfrac{3a^2}{2 * \sqrt{a^3}} = \dfrac{3a^2}{2a * \sqrt{a}} = 1{,}5 * \sqrt{a}$

$v = \sqrt{(a-3)}$, $v' = \dfrac{1}{2 * \sqrt{(a-3)}}$

$$A'_{(a)} = \frac{1{,}5 * \sqrt{a} * \sqrt{(a-3)} - \dfrac{1}{2 * \sqrt{(a-3)}} * \sqrt{a^3}}{(\sqrt{(a-3)})^2}$$

$$A'_{(a)} = \frac{3 * \sqrt{a} * (a - 3) - \sqrt{a^3}}{2 * (\sqrt{(a-3)})^3} = \frac{3 * \sqrt{a} * (a - 3) - a * \sqrt{a}}{2 * (\sqrt{(a-3)})^3}$$

$$A'_{(a)} = \frac{\sqrt{a} * (3a - 9 - a)}{2 * (\sqrt{(a-3)})^3} = \frac{\sqrt{a} * (2a - 9)}{2 * (\sqrt{(a-3)})^3}$$

$$\frac{\sqrt{a} * (2a - 9)}{2 * (\sqrt{(a-3)})^3} = 0 \mid * \; 2 * (\sqrt{(a-3)})^3$$

$\sqrt{a} * (2a - 9) = 0$

$\sqrt{a} = 0 \mid^2$

$a_1 = 0$ keine Lösung $a < 3$

$2a - 9 = 0 \mid +9$

$2a = 9 \mid :2$

$a_2 = 4{,}5$

Zur Beurteilung, ob $A''_{(a)} > 0$: (Begründung siehe Kurvendiskussion

Aufgabe 105)

Ableitung des Zählers Z:

$\sqrt{a} * (2a - 9) = 2 * \sqrt{a^3} - 9 * \sqrt{a}$

$$Z' = \frac{3a^2}{\sqrt{a^3}} - \frac{4,5}{\sqrt{a}}$$

$$A''_{(a)} = \frac{\frac{3a^2}{\sqrt{a^3}} - \frac{4,5}{\sqrt{a}}}{2 * (\sqrt{(a-3)})^3}$$

$$A''_{(4,5)} = \frac{> 0}{> 0} = > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$A_{(4,5)} = 2 * \sqrt{\frac{4,5^3}{(4,5-3)}} = 15,6$$

Randbetrachtung:

$A_{(3)} = \infty > A_{(4,5)}$

$A_{(\infty)} = \infty > A_{(4,5)}$

--> $A_{(4,5)}$ ist ein absolutes Minimum