

Integral Aufgabe 185

Berechnen Sie den Flächeninhalt A , der von $f(x) = 6x - x^2$ und den Tangenten an $f(x)$ durch die Nullstellen von $f(x)$ begrenzt wird.

Nullstellen:

$$6x - x^2 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x - 6) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x - 6 = 0 \quad | +6$$

$$x_2 = 6$$

Tangente durch $x_1 = 0$

$$y_{\text{Tangente1}} = m_{\text{Tangente1}} \cdot x + b_1$$

$$f'(x) = -2x + 6$$

$$f'(0) = 6$$

Punktkoordinaten (0;0) eingesetzt:

$$0 = 0 \cdot 6 + b_1$$

$$b_1 = 0$$

$$y_{\text{Tangente1}} = 6x$$

Tangente durch $x_2 = 6$

$$y_{\text{Tangente2}} = m_{\text{Tangente2}} \cdot x + b_2$$

$$f'(x) = -2x + 6$$

$$f'(6) = -12 + 6 = -6$$

Punktkoordinaten (6;0) eingesetzt:

$$0 = -6 \cdot 6 + b_2 \quad | +36$$

$$b_2 = 36$$

$$y_{\text{Tangente2}} = -6x + 36$$

Schnittpunkt der beiden Tangenten:

$$6x = -6x + 36 \quad | +6x$$

$$12x = 36 \quad | :12$$

$x = 3$ --> A besteht aus 2 gleich großen Teilflächen

$$f(x) - y_{\text{Tangente1}} = 6x - x^2 - (6x) = -x^2$$

$$A = 2 * \int_0^3 (-x^2) dx$$

$$A = 2 * \left| -\frac{x^3}{3} \right|_0^3 = 2 * |-9| = \mathbf{18}$$

