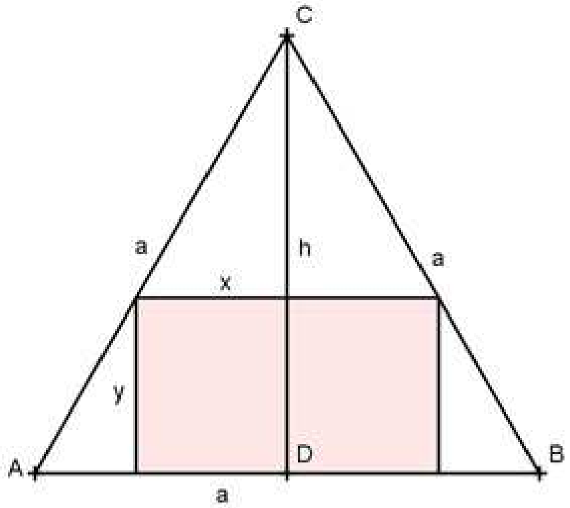
Extrem Aufgabe 21

Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a ist ein Rechteck einbeschrieben. Wie lang müssen die Rechteckseiten x und y werden, damit sein Flächeninhalt maximal wird?



Zielfunktion:

$A = x * y$

Nebenbedingung: $0 < x < a$

Satz von Pythagoras im Dreieck ADC:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \quad | - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} a^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$h = \frac{a}{2} * \sqrt{3}$$

Strahlensatz:

$$\frac{x}{a} = \frac{h - y}{h} = \frac{a/2 \cdot \sqrt{3} - y}{a/2 \cdot \sqrt{3}} \quad | \cdot a/2 \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{x \cdot \sqrt{3}}{2} = a/2 \cdot \sqrt{3} - y \quad | + y$$

$$y + \frac{x \cdot \sqrt{3}}{2} = a/2 \cdot \sqrt{3} \quad | - \frac{x \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{a \cdot \sqrt{3} - x \cdot \sqrt{3}}{2}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$A_{(x)} = x \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3} - x \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$A_{(x)} = \frac{x \cdot a \cdot \sqrt{3} - x^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$A'_{(x)} = \frac{a \cdot \sqrt{3} - 2x \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$a \cdot \sqrt{3} - 2x \cdot \sqrt{3} = 0 \quad | : \sqrt{3}$$

$$a - 2x = 0 \quad | +2x$$

$$2x = a \quad | :2$$

$$\mathbf{x = \frac{a}{2}}$$

$$\mathbf{y =} \frac{a \cdot \sqrt{3} - a/2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a/2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \mathbf{\frac{a \cdot \sqrt{3}}{4}}$$

$A''_{(x)} = - \sqrt{3} <$ = --> Maximum

$$A_{(x)} = \frac{a}{2} * \frac{a * \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 * \sqrt{3}}{8}$$ absolutes Maximum, weil

$$A_{(0)} = \frac{0 * a * \sqrt{3} - 0^2 * \sqrt{3}}{2} = 0 < \frac{a^2 * \sqrt{3}}{8}$$

$$A_{(a)} = \frac{a * a * \sqrt{3} - a^2 * \sqrt{3}}{2} = 0 < \frac{a^2 * \sqrt{3}}{8}$$