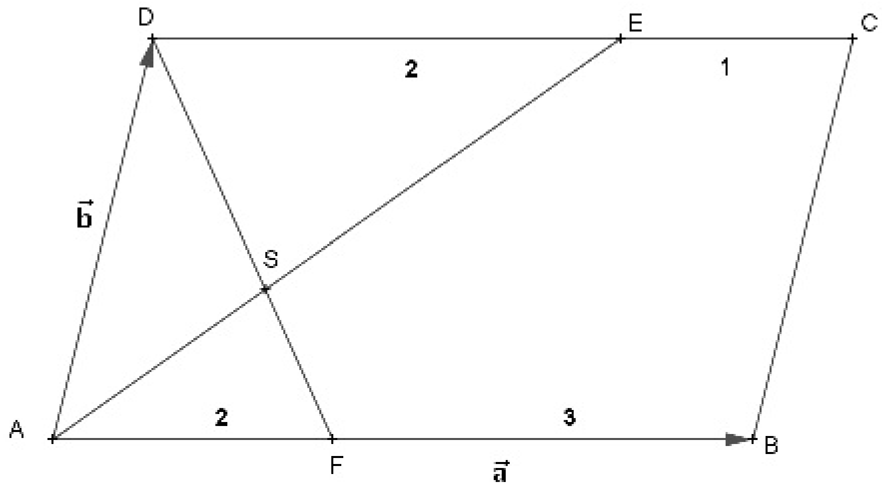
Analytische Geometrie Aufgabe 92

Im Parallelogramm ABCD teilt der Punkt E die Seite DC im Verhältnis 2:1, der Punkt F die Seite AB im Verhältnis 2:3.
In welchem Verhältnis teilen sich die Strecken AE und DF, wenn $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$?



Geschlossene Vektorkette:

$$\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SA} + \vec{b} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{DS} = \lambda * \overrightarrow{DF} = \lambda * (-\vec{b} + \frac{2}{5} * \vec{a})$$

$$\overrightarrow{SA} = \mu * \overrightarrow{EA} = \mu * (-\frac{2}{3} * \vec{a} - \vec{b})$$

$$\lambda * \left(-\vec{b} + \frac{2}{5} * \vec{a}\right) + \mu * \left(-\frac{2}{3} * \vec{a} - \vec{b}\right) + \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} * \left(\frac{2\lambda}{5} - \frac{2\mu}{3}\right) + \vec{b} * (-\lambda - \mu + 1) = \vec{0}$$

$$-\lambda - \mu + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{2\lambda}{5} - \frac{2\mu}{3} = 0 \;|+ \frac{2}{3}\mu$$

$$\frac{2\lambda}{5} = \frac{2\mu}{3} \;| * \frac{5}{2}$$

$$\lambda = \frac{5}{3}\mu \dashrightarrow \lambda = \frac{5}{8}$$

Eingesetzt in (1):

$$-\frac{5\mu}{3}-\ \mu+1=0\ \ |-\ 1$$

$$-\frac{8\mu}{3}=-1\,|*\,\frac{3}{8}$$

$$\mu=\ \frac{3}{8}$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathbf{SA}}}{\overrightarrow{\mathbf{ES}}}=\frac{\mu*\ \overrightarrow{\mathrm{ES}}}{(1-\ \mu)*\ \overrightarrow{\mathrm{ES}}}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathbf{DS}}}{\overrightarrow{\mathbf{FS}}}=\frac{\lambda*\ \overrightarrow{\mathrm{DF}}}{(1-\ \lambda)*\ \overrightarrow{\mathrm{DC}}}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$$