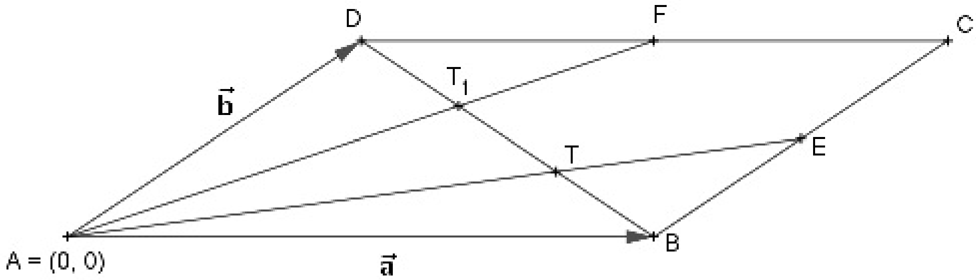
Analytische Geometrie Aufgabe 86

A = (0|0) und die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}$ bilden das Parallelogramm ABCD.
E ist der Mittelpunkt von $\overrightarrow{BC}$, F der von $\overrightarrow{CD}$.
Wie lauten die Koordinaten der Schnittpunkte T von $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$ und T_1 von $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{AF}$?



Geschlossene Vektorkette 1:

$$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} - \vec{a} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AT} = \lambda * \overrightarrow{AE} = \lambda * (\vec{a} + 0{,}5 * \vec{b}) = \lambda * \left(\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} + 0{,}5 * \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right) = \lambda * \begin{pmatrix}7{,}5\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{TB} = \mu * \overrightarrow{DB} = \mu * (-\vec{b} + \vec{a}) = \mu * \left(-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}\right) = \mu * \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\lambda * \begin{pmatrix}7{,}5\\1\end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$7{,}5\lambda + 3\mu - 6 = 0 \qquad (1)$

$\lambda - 2\mu = 0 \mid +2\mu$

$\lambda = 2\mu \mid :2$

$\mu = 0{,}5\lambda$

Eingesetzt in (1):

$7{,}5\lambda + 1{,}5\lambda - 6 = 0 \mid +6$

$9\lambda = 6 \mid :9$

$\lambda = \frac{2}{3}$

$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3} * \binom{7{,}5}{1} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Geschlossene Vektorkette 2:

$\overrightarrow{AT_1} + \overrightarrow{T_1B} - \vec{a} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AT_1} = \lambda * \overrightarrow{AF} = \lambda * (\vec{b} + 0{,}5 * \vec{a}) = \lambda * \left(\binom{3}{2} + 0{,}5 * \binom{6}{0}\right) = \lambda * \binom{6}{2}$

$\overrightarrow{T_1B} = \mu * \overrightarrow{DB} = \mu * (-\vec{b} + \vec{a}) = \mu * \left(-\binom{3}{2} + \binom{6}{0}\right) = \mu * \binom{3}{-2}$

$\lambda * \binom{6}{2} + \mu * \binom{3}{-2} - \binom{6}{0} = \vec{0}$

$6\lambda + 3\mu - 6 = 0 \qquad (1)$

$2\lambda - 2\mu = 0 \mid +2\mu$

$2\lambda = 2\mu \mid :2$

$\mu = \lambda$

Eingesetzt in (1):

$6\lambda + 3\lambda - 6 = 0 \mid +6$

$9\lambda = 6 \mid :9$

$\lambda = \frac{2}{3}$

$\overrightarrow{AT_1} = \frac{2}{3} * \binom{6}{2} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$