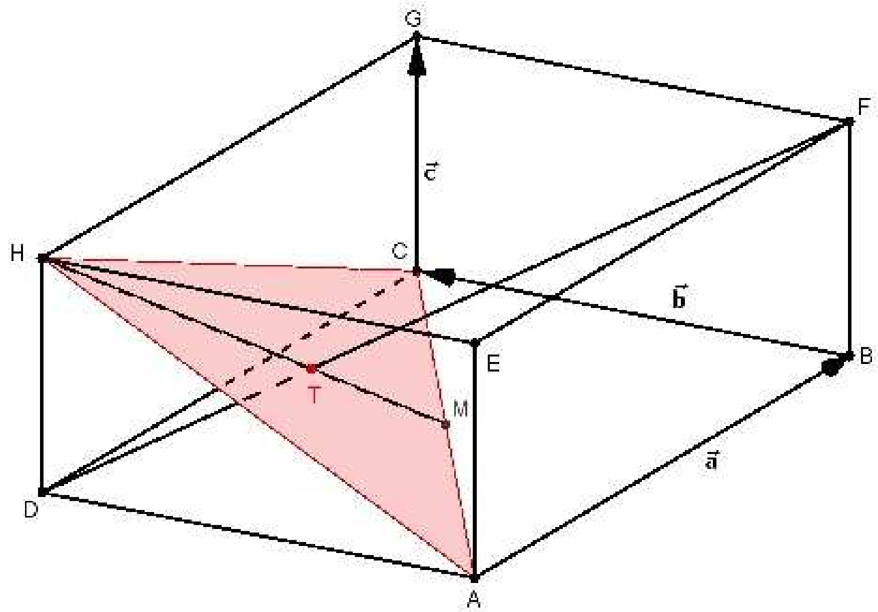
Analytische Geometrie Aufgabe 82

Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{CG}$ bilden den Quader mit der Grundfläche ABCD und der Deckfläche EFGH.
In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt des Dreiecks ACH die Raumdiagonale $\overline{DF}$?



Wenn der Schwerpunkt T auf der Raumdiagonalen DF liegt, ist die Vektorkette

$$\overrightarrow{DT} + \overrightarrow{TA} + \vec{b} = \vec{0}$$

geschlossen, und es existiert eine Lösung für λ.

$$\overrightarrow{DT} = \lambda * \overrightarrow{DF}$$

$$\overrightarrow{DF} = -\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TM} + \overrightarrow{MA}$$

$$\overrightarrow{TM} = \frac{1}{3} * \overrightarrow{HM} = \frac{1}{3} * \left(\overrightarrow{HA} + \frac{1}{2} * \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3} * (-\vec{c} - \vec{b} + \frac{1}{2} * (\vec{b} + \vec{a}))$$

$$\overrightarrow{TM} = -\frac{1}{3} * \vec{c} - \frac{1}{6} * \vec{b} + \frac{1}{6} * \vec{a}$$

$$\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2} * \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2} * (-\vec{a} - \vec{b})$$

$$\overrightarrow{TA} = -\frac{1}{3} * \vec{c} - \frac{1}{6} * \vec{b} + \frac{1}{6} * \vec{a} + \frac{1}{2} * (-\vec{a} - \vec{b})$$

$$\lambda * \left(-\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}\right) + -\frac{1}{3} * \vec{c} - \frac{1}{6} * \vec{b} + \frac{1}{6} * \vec{a} + \frac{1}{2} * \left(-\vec{a} - \vec{b}\right) + \vec{b} = \vec{0}$$

$$\lambda * \left(-\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}\right) + -\frac{1}{3} * \vec{c} + \frac{1}{3} * \vec{b} - \frac{1}{3} * \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} * \left(\lambda - \frac{1}{3}\right) + \vec{b} * \left(-\lambda + \frac{1}{3}\right) + \vec{c} * (\lambda - \frac{1}{3}) = \vec{0}$$

$$\lambda - \frac{1}{3} = 0 \mid + \frac{1}{3}$$

$$\lambda = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathbf{DT}}}{\overrightarrow{\mathbf{TF}}} = \frac{\lambda * \overrightarrow{DF}}{(1 - \lambda) * \overrightarrow{DF}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$