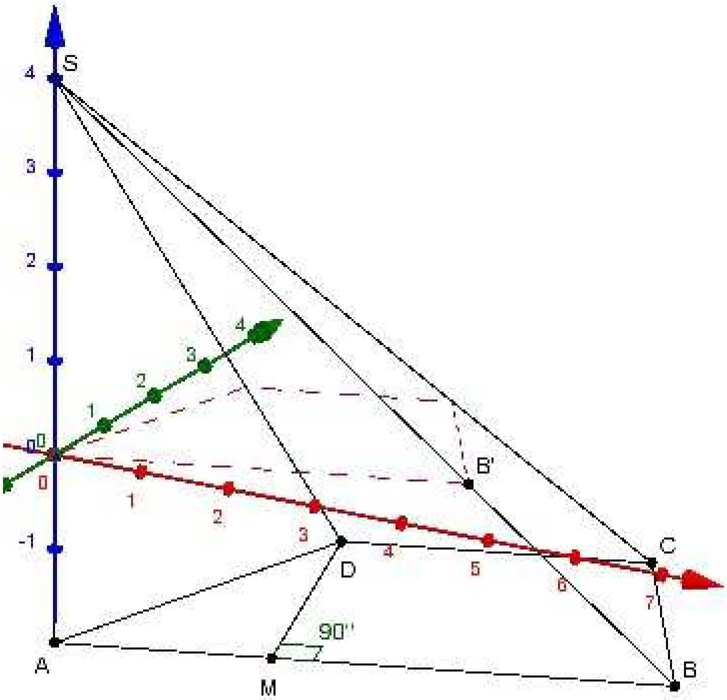
Analytische Geometrie Aufgabe 146

Eine Pyramide hat eine Grundfläche mit A = (0|0|-2), B = (6|2|-2), C = (4|5|-2) und D = (1|4|-2) sowie ihre Spitze S = (0|0|4).
Berechnen Sie
a) die Koordinaten des Schnittpunktes B' der Körperkante BS mit der x,y-Ebene
b) ihr Volumen.



a)

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OS} + t * \overrightarrow{SB}$$

$$\overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{B'} \\ y_{B'} \\ z_{B'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Für die x,y-Ebene gilt für jeden Punkt z = 0.

0 = 4 - 6t |+6t

6t = 4 |:6

t = 2/3

$x_{B'} = 2/3 * 6 = 4$

$y^{B'} = 2/3 * 2 = 4/3$

B' = (4|4/3|0)

b)

$$V = \frac{G * h}{3},\ h_{Pyramide} = |z_A| + z_S = |-2| + 4 = 6 \text{ LE}$$

Beurteilung der Grundfläche:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{AB} = r * \overrightarrow{DC}$$

6 = r * 3 --> r = 2
2 = r * 1 --> r = 2

--> Lineare Abhängigkeit, die beiden Vektoren verlaufen parallel und sind ungleich lang --> ABCD ist ein Trapez.

$$V = \frac{\frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|}{2} * h_{Trapez} * h_{Pyramide}}{3}$$

$$h_{Trapez} = |\overrightarrow{MD}|$$

$$\overrightarrow{MD} = r * \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{MD} * \overrightarrow{BA} = 0$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(r * \begin{pmatrix}-6\\-2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix}-6\\-2\\0\end{pmatrix} = 0$$

36r - 6 + 4r - 8 = 0

40r - 14 = 0 |+14

40r = 14 |:40

r = 7/20

$$\overrightarrow{\mathrm{MD}} = \frac{7}{20} * \begin{pmatrix}-6\\-2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1{,}1\\3{,}3\\0\end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{\mathrm{MD}}\right| = \sqrt{(-1{,}1)^2 + 3{,}3^2} = \sqrt{12{,}1}$$

$$\color{red}{\mathbf{V} =} \frac{\frac{\sqrt{40}+\sqrt{10}}{2} * \sqrt{12{,}1} * 6}{3} = \left(\sqrt{40} + \sqrt{10}\right) * \sqrt{12{,}1} = \color{red}{\mathbf{33\ VE}}$$