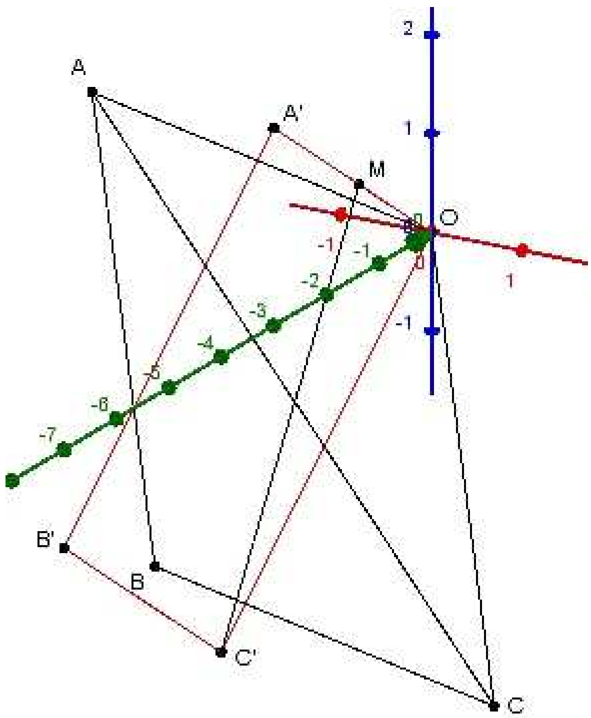
Analytische Geometrie Aufgabe 144

Die Punkte O = (0|0|0), A = (-2|-3|2) und C = (3|-4|-3) bilden ein Dreieck.
a) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck rechtwinklig ist.
b) Wie lauten die Koordinaten eines Punktes B, der das Dreieck zu einem Rechteck ergänzt?
c) Berechnen Sie die Flächeninhalte des Rechtecks und des Dreiecks.
d) Projizieren Sie das Rechteck auf die y,z-Ebene, und geben sie die Koordinaten von A', B' und C' an.
e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des projizierten Rechtecks, und geben Sie an, um wieviel Prozent er sich gegenüber dem ursprünglichen verkleinert hat.



a) Das Dreieck ist dann rechtwinklig, wenn $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$.

Dann muss $\overrightarrow{OA} * \overrightarrow{OC} = 0$ sein.

$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} =$ -6 + 12 - 6 = 0 --> Das Dreieck OAC ist rechtwinklig.

b)

$\overrightarrow{\mathbf{OB}} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-7} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

c) Flächeninhalt $A_{Dreieck}$ OAC:

$$A_{Dreieck} = \frac{\left|\overrightarrow{OA}\right| * \left|\overrightarrow{OC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 2^2} * \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-3)^2}}{2}$$

$$\mathbf{A_{Dreieck}} = \frac{\sqrt{17} * \sqrt{34}}{2} = \mathbf{12\ FE}$$

$\mathbf{A_{Rechteck}}$ **=** $2 * A_{Dreieck}$ = **24 FE**

d)

Alle Punkte in der y,z- Ebene haben die x-Koordinate = 0.

A' = (0|-3|2), B' = (0|-7|-1), C' = (0|-4|-3).

e) Was ist A'B'C'O für ein Viereck?

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{C'B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{-->} \ \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{C'B'}$$

$\overrightarrow{OA'} * \overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ = 6 ≠ 0 --> Kein rechter Winkel --> Das Viereck ist ein Parallelogramm.

M sei der Fußpunkt des Lotes von C' aus auf A'O.

$$A_{A'B'C'O} = \left|\overrightarrow{OA'}\right| * \left|\overrightarrow{MC'}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{OA'}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{MC'} = r * \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OC'}$$

Es gilt:

$$\overrightarrow{MC'} * \overrightarrow{A'O} = 0$$

$$\left(r * \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OC'}\right) * \overrightarrow{A'O} = 0$$

$$\left(r * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

9r - 12 + 4r + 6 = 0

13r = - 6 = 0|+6

13r = 6 |:13

r = 0,4615

$$\overrightarrow{MC'} = 0{,}4615 * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2{,}6155 \\ -3{,}923 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{MC'}\right| = \sqrt{(-2{,}6155)^2 + (-3{,}923)^2} = \sqrt{22{,}23} = 4{,}715$$

$A_{A'B'C'O}$ = v13 * 4,715 = **17 FE**

24 : 100 = 17 : x

24x = 1 700 |:24

x = 70,8% --> **Verkleinerung** um 100% - 70,8% **= 29,2%**