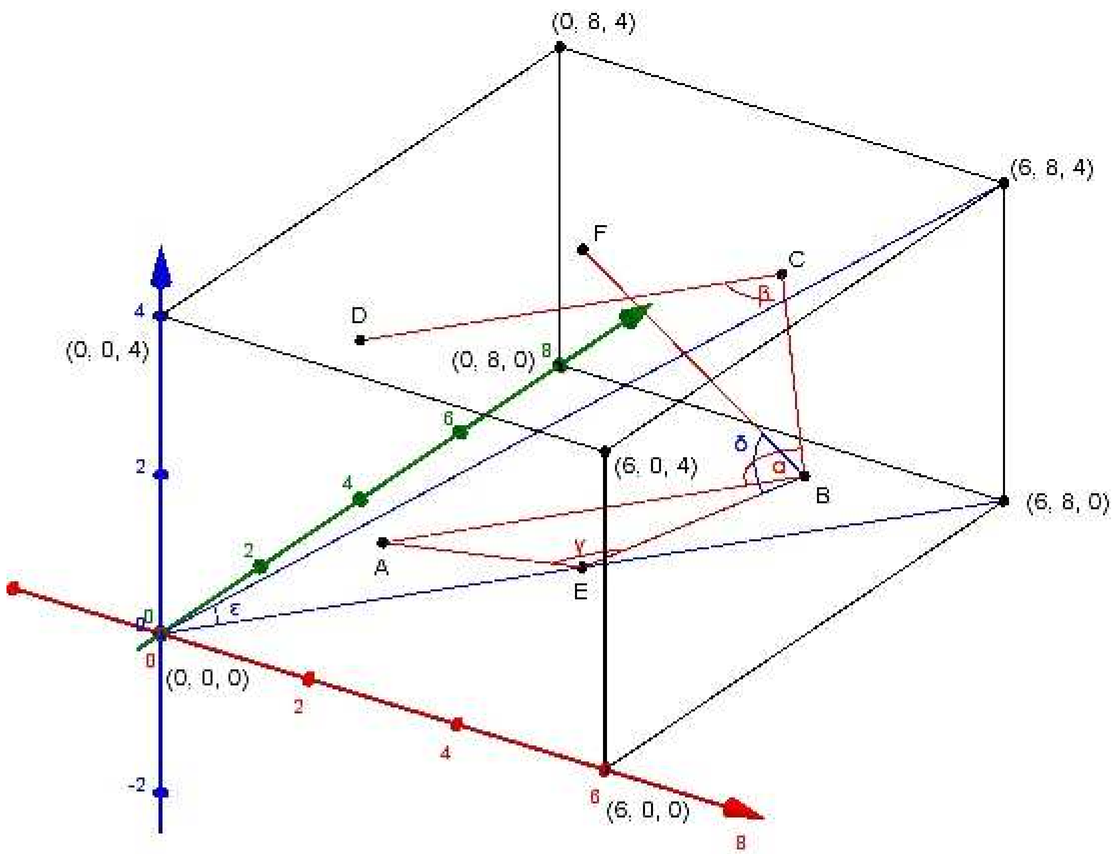
Analytische Geometrie Aufgabe 140

A, B, C, D, E und F sind die Mittelpunkte der Fächen des Quaders.
Berechnen Sie den Winkel
a) α zwischen AB und BC
b) β zwischen BC und CD
c) γ zwischen AE und EB
d) δ zwischen EB und BF
e) Berechnen Sie vom Koordinatenursprung aus den Winkel ε zwischen der Flächendiagonalen der Grundfläche und der Raumdiagonalen.



A = (3|0|2), B = (6|4|2), C = (3|8|2), D = (0|4|2), E = (3|4|0),

F = (3|4|4)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = 5 = |\overrightarrow{BA}|$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\8\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{BC}| = 5 = |\overrightarrow{CB}|$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\8\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{CD}| = 5$

$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}, \overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix}, |\overrightarrow{AE}| = \sqrt{20} = |\overrightarrow{EA}|$$

$$\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix}, |\overrightarrow{EB}| = \sqrt{13} = |\overrightarrow{BE}|$$

$$\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}, |\overrightarrow{BF}| = \sqrt{13}$$

a)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BA} * \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| * |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}}{5 * 5} = \frac{-7}{25} = -0{,}28 \,--> \,\color{red}{\boldsymbol{\alpha = 106,26°}}$$

b)

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{CB} * \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CB}| * |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}}{5 * 5} = \frac{7}{25} = 0{,}28 \,--> \,\color{red}{\boldsymbol{\beta = 73,74°}}$$

c)

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{EA} * \overrightarrow{EB}}{|\overrightarrow{EA}| * |\overrightarrow{EB}|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{20} * \sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{260}} = 0{,}248 \,--> \,\color{red}{\boldsymbol{\beta = 75,64°}}$$

d)

$$\cos\delta = \frac{\overrightarrow{BE} * \overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{BE}| * |\overrightarrow{BF}|} = \frac{\begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{13} * \sqrt{13}} = \frac{5}{13} = 0{,}3846 \,--> \,\color{red}{\boldsymbol{\delta = 67,38°}}$$

e)

Grundflächendiagonale = $\begin{pmatrix}6\\8\\0\end{pmatrix}$, Raumdiagonale = $\begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}6\\8\\0\end{vmatrix} = 10, \begin{vmatrix}6\\8\\4\end{vmatrix} = \sqrt{116}$$

$$\cos\varepsilon = \frac{\begin{pmatrix}6\\8\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix}}{10 * \sqrt{116}} = \frac{100}{\sqrt{11600}} = 0{,}9285 \,-> \,\color{red}{\boldsymbol{\varepsilon = 21,78°}}$$