Analytische Geometrie Aufgabe 122

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k^2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ k \end{pmatrix}$. k ≠ 0

a) Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ für k = 1 linear unabhängig?
b) Für welche k sind sie linear abhängig?
c) Zeigen Sie, wie sich der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$
aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugen lässt, wenn k = -1 ist.

a)

$$r * \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

r + s = 0 (1)
3 * r + s - t = 0 (2)
- 2 * r - 3 * s + t = 0 (3)

Aus (1)

r + s = 0 |-s

r = -s

Eingesetzt in (2) und (3)

-3 * s + s - t = 0 (4)
2 * s - 3 * s + t = 0 (5)

(4) + (5)

- 3 * s = 0 |:-3

s = 0 --> r = 0

Eingesetzt in (5)

t = 0 --> die **3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig**.

b)

r + s = 0 (1)
r * 3 - s * k² - t * k = 0 (2)
-2 * r - 3 * s + t * k = 0 (3)

Aus (1)

$r = - s$

(2) + (3)

$- 3 * s - s * k^2 - t * k = 0$
$2 * s - 3 * s + t * k = 0$

$- s - 3 * s * k^2 = 0$

$-4 * s + s * k^2 = 0$

$s * (k^2 - 4) = 0$

$k^2 - 4 == |+4$

$k^2 = 4 \ |\sqrt{}$

$k_{1,2} = \pm 2$

Aus (3)

$2 * s - 3 * s + t * k = 0 \ |+s$

$t * k = s \ |:k$

$t = s/k$

Wenn r = -s und und t = s/k und k = 2 -->

$$-s * \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{s}{2} * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

--> **für k = 2 sind die 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig.**

Wenn r = -s und und t = s/k und k = -2 -->

$$-s * \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{s}{2} * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

--> **für k = -2 sind die 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig.**

c)

$$r * \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

r + s = -1 (1)
3 * r + s + t = 7 (2)
-2 * r - 3 * s - t = 1 (3)

(2) + (3)

3 * r + s + t = 7
-2 * r - 3 * s - t = 1
----
r - 2 * s = 8 | + 2s

r = 8 + 2s (4)

Eingesetzt in (1)

8 + 2s + s = -1 |-8

3s = -9 |:3

s = -3

Eingesetzt in (4)

r = 8 + 2 * (-3)

r = 2

Eingesetzt in (2)

6 - 3 + t = 7 |-3

t = 4

$$\mathbf{2} * \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \mathbf{- 3} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbf{4} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$