Analytische Geometrie Aufgabe 112

Für welches a sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\a\\a^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\8\\18\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ linear abhängig?}$$

Die Vektoren sind dann linear abhängig, wenn sie sich als Linearkombination darstellen lassen.

$$r * \begin{pmatrix}1\\a\\a^2\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}2\\8\\18\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$r + 2s + t = 0$ (1)
$ar + 8s + t = 0$ (2)
$a^2r + 18s + t = 0$ (3)

(1) * (-1) + (2)

$- r - 2s - t = 0$
$ar + 8s + t = 0$

$ar - r + 6s = 0$

$r * (a - 1) + 6s = 0$ (4)

(1) * (-1) + (3)

$- r - 2s - t = 0$
$a^2r + 18s + t = 0$

$a^2r - r + 16s = 0$

$r * (a^2 - 1) + 16s = 0$ (5)

(4) * (-8) + (5) * 3

$- 8r * (a - 1) - 48s = 0$
$3r * (a^2 - 1) + 48s = 0$

$3r * (a^2 - 1) - 8r * (a - 1) = 0$

$3a^2r - 3r - 8ar + 8r = 0 \quad |:r \quad r \neq 0$

$3a^2 - 8a + 5 = 0$

A, B, C - Formel

A = 3, B = -8, C = 3

$$a_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 * 3 * 5}}{2 * 3} = \frac{8 \pm 2}{6}$$

$$\mathbf{a_1 = 1, a_2 = \frac{5}{3}}$$

Beispiel für a = 1:

$$r * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

r + 2s + t = 0 (1)
r + 8s + t = 0 (2)
r + 18s + t = 0 (3)

(1) * (-1) + (2)

- r - 2s - t = 0
r + 8s + t = 0

6s = 0 |:6

s = 0

Eingesetzt in (1)

r + t = 0 |-t

r = - t

Beispiel:

t = 1, r = - 1, s = 0

$$-1 * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel $a = \frac{5}{3}$:

$$r * \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{25}{9} \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$r + 2s + t = 0$ (1)

$\frac{5}{3}r + 8s + t = 0$ (2)

$\frac{25}{9}r + 18s + t = 0$ (3)

(1) * (-1) + (2)

$- r - 2s - t = 0$

$\frac{5}{3}r + 8s + t = 0$

$\frac{2}{3}r + 6s = 0 \quad |*3$

$2r + 18s = 0 \quad |-18s$

$2r = - 18s \quad |:2$

$r = - 9s$

Eingesetzt in (1):

$- 9s + 2s + t = 0 \quad |+7s$

$t = 7s$

Beispiel:

$s = 1, r = - 9, t = 7$

$$-9 * \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{25}{9} \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix} + 7 * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$